3 W. 5 REMOVED
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF ILLINOIS

Untersuchungen
über die
Bewegungen einer zähen Flüssigkeit unter einer rotierenden Platte.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
hohen philosophischen Fakultät
der
K. B. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen
vorgelegt
von

alter Gustav **Hermann Sanders**
aus Hamburg.

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Februar 1912.

Erlangen.
K. B. Hof- und Universitätsbuchdruckerei von Junge & Sohn.
1912.

96

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Universität Erlangen.

Referent: Herr Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Wiedemann.
Dekan: Herr Geh. Hofrat Prof. Dr. H. Varnhagen.

Meinen Eltern!

532.5
Sa5u
REMOTE STORAGE

Die innere Reibung von Flüssigkeiten ist bereits in der verschiedensten Weise untersucht worden. Eine Reihe von Methoden benutzt die Dämpfung schwingender Körper in Flüssigkeiten oder die Schwingungen eines mit Flüssigkeit gefüllten Hohlkörpers[1]). Hierbei handelt es sich um periodische Flüssigkeitsbewegungen während bei der Transpirationsmethode[1]) und den Anordnungen, bei welchen rotierende Zylinder oder Kugeln verwendet werden[1]), stationäre Erscheinungen auftreten. Im letzten Falle werden Integralwirkungen auf bestimmte Körper, wie Kugeln oder Zylinder benutzt. Will man jedoch die Flüssigkeitsbewegung an einer bestimmten Stelle verfolgen, so eignen sich hierzu Sonden, dünne gerade Stäbe, die in der Mitte an einem elastischen Draht aufgehängt sind. Nach dieser Methode hat Herr Prof. Dr. R. Reiger[2]) die Ausbreitung scherender Deformationen in einer Flüssigkeit untersucht, die sich unter einer schwingenden Platte befindet. Auf seine Veranlassung habe ich die vorliegende Arbeit unternommen, sie schließt sich an seine Abhandlung an, behandelt jedoch stationäre Bewegungen.

Eine Kreisscheibe, welche die Oberfläche einer zähen Flüssigkeit berührt, wird in gleichförmige Um-

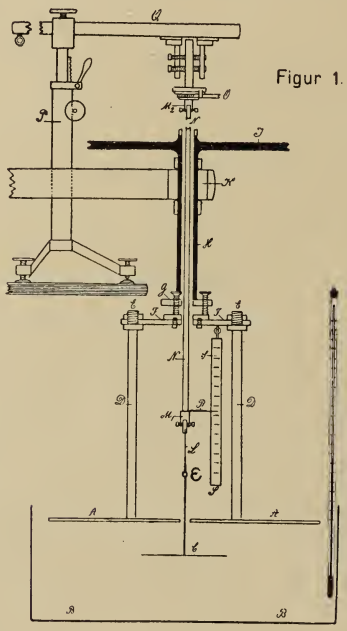
---

[1]) Winkelmann-Graetz, Handbuch der Physik 1. Bd., 2. Hälfte. 1908. 1373 ff. Siehe besonders den Abschnitt II. Die Reibung tropfbarer Flüssigkeiten.

[2]) R. Reiger, Wied. Ann. (4) 31. 51. 1910.

drehung versetzt und die dadurch hervorgerufenen Erscheinungen werden mit Hilfe von Sonden verfolgt.

Wie dies im einzelnen durchgeführt wurde, zeigt der folgende Abschnitt, in dem die Versuchsanordnung und die Messungsmethode beschrieben ist. Der nächste Abschnitt enthält Versuchsreihen, welche unter verschiedenen Bedingungen erhalten sind und im letzten Teil folgt an der Hand der Kurven eine Diskussion der Tabellen und der beobachteten Erscheinungen.



Figur 1.

Versuchsanordnung und Beobachtungsmethode.

Zu den Versuchen diente der Apparat Figur 1. Er besteht im wesentlichen aus der Platte A, die durch einen Motor in Umdrehung versetzt wird, dem Gefäße B mit der Versuchsflüssigkeit und der Sonde C.

Die Zeichnung gibt einen Querschnitt in einer durch die Drehungsachse gelegten Ebene. Die Platte A, welche der Flüssigkeitsoberfläche eine Deformation erteilt, besteht aus vernickeltem Messing. Zwei 25 cm lange und 1,1 cm dicke Stäbe DD sind mit ihren unteren Enden in die Platte eingeschraubt und mit den Schrauben E an einem Querstab F befestigt, der in der Mitte eine kleinere durchbohrte Platte trägt. 3 Schrauben mit Spiralfedern verbinden diese mit einer weiteren Scheibe G, sie ermöglichen eine genaue Horizontalstellung der Platte A. Dieser Teil des Apparates stimmt im wesentlichen mit dem von Reiger[1]) verwendeten überein. An die Platte G ist ein 20 cm langes und 1,2 cm weites Eisenrohr H angesetzt, das an seinem oberen Ende eine eiserne Riemenscheibe I trägt und durch zwei Klemmringe in einem Lager K festgehalten wird. Letzteres war in einen eisernen Wandarm eingelassen. Es wurden zwei Platten A von 35,6 cm Durchmesser und 0,6 cm Dicke resp. 15 cm Durchmesser und 0,3 cm Dicke benutzt. Beide hatten im Mittelpunkt eine kreisförmige Öffnung von 1,5 cm Durchmesser zum Einführen des die Sonde tragenden Drahtes der Sonde.

Die Platte wurde durch einen Gleichstrommotor von $^1/_2$ P.S. bei 220 Volt Spannung und $^1/_2$ Ampère Stromstärke in Umdrehung versetzt. Seine Welle trug 3 Riemenscheiben von verschiedenem Durchmesser und war mit einer Schneckenrad-Übersetzung verbunden, die aus einem Zahnrad und einer Schnecke bestand. Diese trug mehrere Riemenscheiben von verschiedenen Durchmessern, so daß mit Hilfe eines

[1]) l. c. pag. 59.

weiteren Stufenrades mit 8 Schnurläufen und eines Vorschaltwiderstandes im Stromkreis des Motors die Zeit für eine Umdrehung der Platte zwischen 0,25 und 370 Sekunden geändert werden konnte. Zur Verbindung der Schnurläufe mit dem Rade I (Figur 1) dienten ein etwa 5 m langer Riemen und mehrere kleine Leitrollen.

Das Glasgefäß B wurde soweit mit der Versuchsflüssigkeit gefüllt, daß deren Oberfläche mit der Platte zusammenfiel. Als Versuchssubstanz diente Paraffinum liquidum, das von E. Merck in Darmstadt bezogen worden war. Eine kleine Anzahl von Beobachtungen ist mit destilliertem Wasser durchgeführt worden. Beim Einfüllen der Flüssigkeit ist darauf zu achten, daß in der Nähe des Mittelpunktes der Platte keine Luftblasen auftreten, weil dadurch Störungen in der Bewegung der Sonde bedingt sind. Luftblasen am Plattenrande sind ohne Einfluß, wie Vorversuche gezeigt hatten, auch werden sie bei genügend großer Geschwindigkeit der Platte nach kurzer Zeit fortgeschleudert. Es wurden drei verschiedene Glasgefäße benutzt, die sämtlich zylindrisch waren. Sie hatten folgende Dimensionen:

Nr. des Gefäßes	Innendurchmesser	Innere Höhe
1	39 cm	13 cm
2	15,5 cm	16,5 cm
3	19,5 cm	35,5 cm.

Wird die Platte in Umdrehung versetzt, so überträgt sich vermöge der inneren Reibung ihre Bewegung auf die Flüssigkeit. Bringt man eine Sonde an verschiedene Stellen der Flüssigkeit, so gibt ihr Ausschlag in verschiedenen Abständen von der Platte ein Bild der Erscheinungen in einem bestimmten Gebiet unter

der Platte. Die Sonden bestanden aus geraden, 0,7—0,8 mm dicken Messingstäben, die in der Mitte an einem Vertikalstab mit Spiegel ε und Aufhängedraht L angelötet waren. Letzterer war mit seinem oberen Ende in die Bohrung eines Messingzylinders von 0,6 cm Dicke und 2 cm Länge eingelötet und wurde von zwei Schrauben in einem weiteren Zylinder M_1 festgehalten. Dieser war mit einem ähnlichen Zylinder M_2 durch einen Messingstab N von 45,5 cm Länge und 0,6 cm Dicke verbunden, der frei durch das Rohr H hindurch ging. Dadurch war die Sonde völlig unabhängig von dem rotierenden Apparat aufgehängt. Ein Zahnrad O mit seitlichem Trieb diente zum Drehen der Sonde um ihre Vertikalachse. Die Verschiebung der Sonde in senkrechter Richtung wurde mit Hilfe des Stativs P vorgenommen. Die Stellschrauben am letzteren ruhten auf einem Holzbock, der ebenso wie die Gefäße zur Aufnahme der Flüssigkeit auf einem Wandbrett stand. Das Stativ P trug oben einen Querbalken Q an dessen einem Ende ein Hohlzylinder mit 6 Schrauben zum genauen Zentrieren und Vertikalstellen des Stabes mit der Sonde und an dessen anderem Ende ein Gegengewicht angebracht war. Wird die Platte A in Umdrehung versetzt, so erfährt die Sonde eine Ablenkung aus ihrer Gleichgewichtslage, die mit Fernrohr, Spiegel und Skala gemessen wurde.

Der Abstand zwischen Sonde und Boden wurde ebenso wie bei Reiger [1]) bestimmt. Bei R war ein Index angebracht, bestehend aus einem Draht von 0,3 mm Dicke mit angesetztem Glasfaden von

[1]) l. c. 61.

0,09—0,15 mm Stärke. Dieser war durch Ausziehen eines erwärmten Glasrohres durch dessen eigenes Gewicht hergestellt und Spirituslack geschwärzt worden. Hinter diesem Index war eine Skala S aufgehängt, die mit einem Fernrohr abgelesen wurde. Mit dieser Skala konnte die Gesamthöhe der Flüssigkeit dadurch ermittelt werden, daß man die Sonde einmal mit dem Boden des Gefäßes, dann mit der Platte in Berührung brachte. Die Differenz der beiden Ablesungen, vermehrt um die Dicke des Sondenquerstabes gibt die gesuchte Höhe.

Die Direktionskraft des Aufhängedrahtes der Sonde wurde nach bekannten Methoden[1]) aus Schwingungsbeobachtungen bestimmt, wobei zur Vergrößerung des Trägheitsmomentes zwei zylindrische Stäbe von 10 und 20 cm Länge und 0,3 cm Dicke dienten. Sie trugen in der Mitte eine Höhlung und wurden dort mit etwas Klebwachs an dem Vertikalstab der Sonde befestigt.

Die Bestimmung der Zeitdauer für eine Umdrehung der Platte geschah während der Beobachtung des Ausschlages im Fernrohr. Bewegt sich eine der Säulen D (Figur 1) vor dem Spiegel vorbei, so wird für einen Moment das Gesichtsfeld dunkel. Trat dies ein, so wurde eine Sekundenuhr, die mit einem Normal-Chronometer verglichen war, in Gang gesetzt und nachdem die erwähnte Verdunkelung 50—100mal eingetreten war, arretiert. Die abgelesene Zeit, dividiert durch die halbe Anzahl der Verdunkelungen, gibt die Zeitdauer einer Umdrehung der Platte. Diese Methode konnte bei kleineren Geschwindigkeiten deswegen nicht

[1]) Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Physik, 2. Aufl. 105, 205.

angewandt werden, weil in diesem Falle das Gesichtsfeld längere Zeit dunkel bleibt. Daher wurde an einer der Säulen D ein Spiegel so befestigt, daß das Bild einer Fadenglühlampe vom Spiegel in das Ablesefernrohr reflektiert wurde. Drehte sich die Platte, so wurden die Zeiten bestimmt, zu denen der helle Lichtstreifen an dem Fadenkreuz vorbeiging und sonst ebenso verfahren.

Zur Ermittelung der Temperatur der Versuchsflüssigkeit diente ein in $^1/_{10}{}^0$ Celsius von — 2—48^0 geteiltes Thermometer, das nach einem Normalthermometer der physikalisch-technischen Reichsanstalt geeicht war. Bei den Versuchen mit der Platte von 35,6 cm Durchmesser befand es sich zwischen Platte und Gefäßwand und wurde während des Versuchs in der Flüssigkeit belassen. Vorversuche hatten gezeigt, daß das Thermometer keinen störenden Einfluß auf den Gang der Sonde hatte. Bei der kleineren Platte machte die Einführung des Thermometers während des Versuches Schwierigkeiten, daher wurde nur am Anfang und am Ende jeder Versuchsreihe die Temperatur der Flüssigkeit bestimmt. Alle Versuche wurden bei Zimmertemperatur angestellt und diese bei jeder Beobachtungsreihe angegeben.

Endlich war es noch wünschenswert, die Zähigkeit der Versuchssubstanz zu ermitteln. Hierzu diente zunächst eine absolute Methode, der das Poiseuillesche Gesetz zugrunde liegt und bei welcher die Zeit bestimmt wird, welche ein abgemessenes Flüssigkeitsvolum braucht, um unter einem bestimmten Druck durch eine Kapillare von gegebenen Dimensionen zu fließen. Die Versuchsanordnung war der von Haffner[1])

[1]) Haffner, Diss. Erlangen. 10ff. 1903.

und Pauschmann[1]) benutzten ähnlich. Die Werte für den Reibungskoeffizienten η des Paraffinöls in c. g. s.-Einheiten bei verschiedenen Temperaturen zeigt die folgende Tabelle.

Tabelle 1.

Temperatur	13°	16°	18°	19°	22°	26°
Zähigkeit	2,556	2,043	1,772	1,649	1,350	1,044

Um zu prüfen, ob während der Versuche sich der Reibungskoeffizient geändert hatte, wurde eine relative Methode benutzt[2]). Als Durchflußgefäß diente

---

Bemerkung. Auf eine eigentümliche Erscheinung sei wenigstens kurz hingewiesen. Eine merkliche Änderung des Reibungskoeffizienten zeigte sich, nachdem das Paraffinöl längere Zeit im Winter in einem ungeheizten Raum gestanden hatte. In der sonst vollständig klaren Flüssigkeit trat eine Ausflockung von weißen festen Teilchen auf, die allmählich verschwand, als das Zimmer regelmäßig geheizt wurde. Eine Bestimmung der Zähigkeit ergab eine Änderung von etwa — 10% des früheren Wertes. Nun wurde eine Probe des Paraffinöls in einer Kältemischung aus Eis und Kochsalz abgekühlt. Die Flüssigkeit wurde mit sinkender Temperatur trübe bis milchweiß und halbfest. Oberhalb 12° verschwand jedoch die Trübung und als dann eine Probe der abgekühlten Substanz bei 20° im Reibungsapparat untersucht wurde, hatte sich die Zähigkeit um etwa 2% vermehrt. Am nächsten Tage war sie nur noch um 0,4% von dem früheren Betrage verschieden. Dieser Vorgang ist erklärlich, da erfahrungsgemäß die Anwesenheit fester Teilchen die Zähigkeit einer Flüssigkeit erhöht. Dagegen steht eine Erklärung für die oben erwähnte Verkleinerung des Reibungskoeffizienten nach längerer Abkühlung noch aus.

[1]) Pauschmann, Diss. Erlangen. 16ff. 1909.

[2]) Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik 59.

ein dem Ostwaldschen ähnlicher Apparat[1]), der von Reiger[2]) beschrieben und abgebildet ist. Anfangs wurde nach jedem Versuch mit der rotierenden Platte bei der betreffenden Versuchstemperatur die Durchflußzeit ermittelt. Da aber der Reibungskoeffizient sich im Laufe der Zeit kaum änderte, so wurde später nur etwa jede Woche die Durchflußzeit mit dem erwähnten Apparate kontrolliert.

Die folgenden Zahlen rechtfertigen dies:

Datum	Temperatur	Durchflußzeit in Sekunden (aus je 3 Versuchen)
1. Mai	22°	1243"
25. Juli	22°	1241".

Ein Versuch mit der rotierenden Platte und den Sonden wurde in folgender Weise ausgeführt. Zunächst wurde die Platte A (Figur 1) genau wagerecht, die Vorrichtung zum Halten der Sonde vertikal gestellt, dann die Versuchsflüssigkeit in das Gefäß B gefüllt und das Thermometer T eingeführt. War die Temperatur der Flüssigkeit konstant geworden, so wurde mit den Messungen begonnen. Je nach der Höhe des Gefäßes wurden die Ausschläge der Sonde in 10 bis 30 verschiedenen Abständen vom Boden ermittelt. Nach Ablesung der Lage des Index R auf der Skala S wurde das Skalenfernrohr auf den Sondenspiegel eingestellt und die Temperatur abgelesen. Beim Einschalten des Motors stellte sich meist die Sonde gleich ein und kehrte, nachdem der Motor 3—10 Minuten lang in Gang gehalten und während dieser Zeit die

---

[1]) W. Ostwald, Hand- und Hilfsbuch. 195. 1893.

[2]) l. c. 63.

Dauer einer Umdrehung der Platte und der Ausschlag der Sonde gemesen wurden, nach Ausschalten des Motors aperiodisch in die Ruhelage zurück. Kleine Nullpunktsverschiebungen, die bei großen Ausschlägen leicht auftreten, lassen sich durch Umkehrung der Drehungsrichtung des Motors nach jedem Versuch eliminieren. Nachdem wiederum die Temperatur der Flüssigkeit abgelesen war, wurde die Sonde um einen kleinen Betrag gehoben oder gesenkt und bei dem neuen Abstand wie oben verfahren.

Bei den Versuchen mit Wasser, dessen Reibungskoeffizient etwa $^1/_{200}$ von dem des Paraffinöls ist, wurden störende Flüssigkeitsbewegungen, wie sie namentlich an der Oberfläche auftreten, nicht so rasch gedämpft wie beim Öl. Auch brauchte die Sonde längere Zeit (etwa 20—30 Minuten) bis sie ihren Endausschlag erreichte. So waren für die Ablesungen an einer Stelle nach rechts und links etwa 60 Minuten erforderlich. Dies zieht wegen der langen Zeiträume, auf die sich eine Versuchsreihe erstreckt, ein Schwanken der Temperatur innerhalb eines Versuchs nach sich. Die Tabellen und Kurven geben Mittelwerte aus 2—4 Ablesungen in einem bestimmten Abstand von der Platte und dürften trotz der relativ großen Fehler ein ungefähres Bild der Erscheinungen geben.

Tabellen.

In allen folgenden Tabellen und Kurven haben die Abkürzungen folgende Bedeutung.

Gefäße:

Nr. 1 Zylindrisches Glasgefäß von 39 cm Innendurchmesser und 13 cm Höhe,
Nr. 2 ebenso, Durchmesser 15,5 cm, Höhe 16,5 cm,
Nr. 3 ebenso, Durchmesser 19,5 cm, Höhe 35,5 cm.

Sonden:

l_1 Länge, d_1 Dicke } des Querstabes,

l_2 Länge, d_2 Dicke, f Direktionskraft } des Aufhängedrahtes.

Der Abstand der Sonde vom Boden des Gefäßes wird mit A bezeichnet und stets in cm angegeben, die Ablenkung α der Sonde in Bogenmaß gemessen. Das auf die Sonde ausgeübte Drehmoment ist also $f \cdot \alpha$.

In den Tabellen ist stets $f \cdot \alpha$ unter dem zugehörigen Wert A angegeben; in den Kurven durchgehends A als Abszisse und $f \cdot \alpha$ als Ordinate aufgetragen. Der Boden des Gefäßes ist im Koordi-

natenanfangspunkt gedacht, die Platte durch eine Gerade parallel der Ordinatenachse angedeutet.

Platten:

Die Zeitdauer für eine volle Umdrehung der Platte wurde mit T, die Winkelgeschwindigkeit der Platte mit ω_p bezeichnet.

Versuchsflüssigkeit:

Wo nichts besonderes bemerkt ist, war diese Paraffinum liquidum, h bedeutet die Flüssigkeitshöhe, d. h. den Abstand der Platte vom Boden des Gefäßes, ϑ ist die mittlere Versuchstemperatur. Für die Dichte des Paraffinöls wurden bei verschiedenen Temperaturen die folgenden Werte erhalten:

Tabelle 2.

Temperatur	0°	7,5°	13,5°	24°
Dichte	0,899	0,890	0,887	0,879

I. Versuche mit verschiedenen Geschwindigkeiten der Platte bei konstanter Flüssigkeitshöhe.

A. Platte von 35,6 cm Durchmesser.

Gefäß Nr. 1.

Tabelle 3.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm

$l_2 = 29$ mm $d_2 = 0{,}07$ mm $f = 5781$

$h = 11{,}25$ cm $\vartheta = 16{,}2°$

$T = 231$ sec $\omega_p = 0{,}0271$

Kurve 3d.

A	1,12	1,84	2,50	3,23	3,92	4,71
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,223	0,393	0,514	0,636	0,769	0,925

A	5,43	6,14	6,84	7,58	8,25	8,93
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,07	1,21	1,42	1,57	1,85	2,01
A	9,65	10,27	10,83			
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	2,40	2,77	3,12			

Tabelle 4.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}88$ mm
$l_2 = 28{,}5$ mm $d_2 = 0{,}09$ mm $f = 16590$
$h = 10{,}73$ cm $\vartheta = 17{,}8^0$
$T = 110$ sec $\omega_p = 0{,}057$

Kurve 2a.

A	0,291	1,01	1,9	2,68	3,25	3,90
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,208	0,456	0,750	1,027	1,210	1,45
A	4,48	5,14	5,65	6,18	6,72	7,24
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,70	1,94	2,16	2,32	2,64	2,85
A	7,76	8,28	8,83	9,35	9,84	10,16
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	3,15	3,45	3,83	4,32	4,81	5,79
A	10,51					
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	7,79					

Tabelle 5.

$l_1 = 121$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 28$ mm $d_2 = 0{,}10$ mm $f = 27540$
$h = 10{,}73$ cm $\vartheta = 17{,}4^0$
$T = 55$ sec $\omega_p = 0{,}114$

Kurve 2b.

A	0,71	1,32	2,45	2,96	3,55	4,11
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,743	1,18	2,04	2,53	2,86	3,19
A	4,73	5,32	5,85	6,40	7,03	7,55
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	3,69	4,15	4,68	5,14	5,86	6,54
A	8,10	8,59	9,10	9,66	10,05	10,32
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	6,9	7,56	8,64	9,50	11,23	13,45

Tabelle 6.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}88$ mm
$l_2 = 33$ mm $d_2 = 0{,}15$ mm $f = 165300$
$h = 10{,}73$ cm $\vartheta = 17{,}17^0$
$T = 27{,}8$ sec $\omega_p = 0{,}225$

Kurve 2c.

A	0,59	1,08	1,65	2,38	2,91	3,47
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,24	1,84	2,53	3,31	4,13	4,79
A	4,03	4,58	5,10	6,13	6,20	6,70
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	5,45	6,44	7,10	7,77	8,93	9,91
A	7,23	7,75	8,25	8,80	9,32	9,83
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	10,9	12,4	13,55	15,5	18,7	20,2
A	10,28					
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	24,5					

Tabelle 7.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 29$ mm $d_2 = 0{,}20$ mm $f = 416220$
$h = 10{,}71$ cm $\vartheta = 18{,}16^0$
$T = 13{,}8$ sec $\omega_p = 0{,}453$

Kurve 2d.

A	0,48	1,02	1,64	2,17	2,77	3,38
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	2,08	2,50	4,16	5,20	6,44	7,06
A	3,89	4,5	5,06	5,63	6,43	7,08
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	8,32	9,56	10,40	11,60	14,30	15,4
A	7,75	8,17	8,61	9,16	9,66	10,12
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	17,9	19,9	21,6	26,2	30,9	39,1
A	10,40	10,59				
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	45,8	64,0				

Tabelle 8.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 29$ mm $d_2 = 0{,}20$ mm $f = 416220$
$h = 10{,}81$ cm $\vartheta = 18{,}05^0$
$T = 7{,}2$ sec $\omega_p = 0{,}87$

Kurve 2e.

A	0,51	0,97	1,48	1,98	2,38	3,13
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	3,25	4,54	6,65	7,82	9,97	11,4
A	3,66	4,22	4,75	5,27	5,83	6,32
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	12,97	14	15,4	15,8	17,5	18,7
A	6,81	7,38	7,91	8,49	8,90	9,48
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	20,35	22,45	25,65	30,8	35,8	46,6
A	10,00	10,47				
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	60,7	94,8				

Tabelle 9.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 29$ mm $d_2 = 0{,}20$ mm $f = 416\,220$
$h = 11{,}04$ cm $\vartheta = 15{,}1^0$
$T = 3{,}20$ sec $\omega_p = 1{,}955$

Kurve 3a.

A	0,89	1,88	2,48	3,01	3,54	4,15
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	14,95	26,6	32,2	36,6	40,75	45,8
A	4,62	5,18	5,66	6,25	6,78	7,28
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	47,9	48,3	51,2	52	52,4	52,4
A	7,85	8,40	8,81	9,46	9,90	10,46
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	57	61,2	71,1	84,2	121,4	190,0

Tabelle 10.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 28$ mm $d_2 = 0{,}3$ mm $f = 1\,717\,800$
$h = 11{,}09$ cm $\vartheta = 13{,}85^0$
$T = 1{,}84$ sec $\omega_p = 3{,}40$

Kurve 3b.

A	0,55	1,08	2,79	4,00	4,70	5,10
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	32,3	52	104,5	120	125	127
A	6,13	6,65	7,17	7,68	8,82	9,40
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	119,5	117	117,6	102,5	115	141
A	9,90	10,38	10,72			
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	201	302	441			

Tabelle 11.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 28$ mm $d_2 = 0{,}3$ mm $f = 1717800$
$h = 11{,}09$ cm $\vartheta = 16{,}95^0$
$T = 1{,}25$ sec $\omega_p = 5{,}01$

Kurve 3c.

A	0,69	1,29	1,83	2,38	2,88	3,44
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	89	142,7	183,5	208	233,5	237
A	3,97	4,46	5,00	5,46	6,05	6,58
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	221	208	193	185,5	156	149
A	7,19	7,66	8,20	8,72	9,18	9,74
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	144	132	130,3	140,6	156	190,5
A	10,22	10,36	10,86			
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	294	345	660			

B. Platte von 15 cm Durchmesser.

a) Gefäß Nr. 1.

Tabelle 12.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}866$ mm
$l_2 = 28$ mm $d_2 = 0{,}3$ mm $f = 1683500$
$h = 10{,}86$ cm $\vartheta = 17{,}22^0$
$T = 0{,}83$ sec $\omega_p = 7{,}56$

Kurve 7d.

A	0,98	2,02	3,72	4,15	5,22	6,28
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	8,92	21,9	37,8	42,7	46,9	52,8
A	7,32	8,42	8,93	9,45	9,98	10,48
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	58,0	65,0	79,1	124,5	267,5	673

Tabelle 13.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 28$ mm $d_2 = 0{,}3$ mm $f = 1683500$
$h = 10{,}86$ cm $\vartheta = 18{,}25^0$
$T = 1{,}20$ sec $\omega_p = 5{,}22$

Kurve 7e.

A	0,988	2,01	3,67	5,29	6,81	7,90
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	7,58	12,78	21,1	29,45	34,5	25,2
A	8,96	9,98	10,35	10,61		
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	58,9	193,5	343	608		

Tabelle 14.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 28$ mm $d_2 = 0{,}30$ mm $f = 1683500$
$h = 10{,}86$ cm $\vartheta = 18{,}1^0$
$T = 1{,}65$ sec $\omega_p = 3{,}8$

Kurve 7f.

A	0,98	2,02	3,11	4,14	5,27	6,30
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	6,64	9,25	14,8	18,35	21,9	24,1
A	7,33	8,38	9,42	9,98	10,47	10,61
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	27,6	37,7	87,5	151,5	323	417

b) Gefäß Nr. 2.

Tabelle 15.

l_1, l_2 — f wie in Tabelle 14
$h = 10{,}87$ cm $\vartheta = 18^0$
$T = 0{,}84$ sec $\omega_p = 7{,}56$

Kurve 7a.

A	2,8	3,34	3,88	4,38	4,92	5,50
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	25,8	33,7	42,1	54	63,9	79,7
A	5,95	6,48	7,03	7,56	8,10	8,58
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	90,9	99,3	120,8	131	142,5	149,2
A	9,15	9,66	10,21	10,45		
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	157,7	202	412	607		

Tabelle 16.

l_1 l_2 — f wie in Tabelle 14
$h = 10{,}86$ cm $\vartheta = 16{,}9^0$
$T = 1{,}17$ sec $\omega_p = 5{,}20$

Kurve 7b

A	2,79	3,33	3,92	4,41	4,96	5,51
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	12,7	16,1	21,5	27,6	35,3	43,4
A	6,0	6,55	7,07	7,56	8,15	8,72
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	52,8	63,8	75,9	89,2	105,7	127,5
A	9,24	9,75	10,27	10,51		
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	157,8	230,4	409	523		

Tabelle 17.

l_1 l_2 — f wie in Tabelle 14
h = 10,86 cm ϑ = 18,1°
T = 1,65 sec ω_p = 3,8

Kurve 7c.

A	2,84	3,41	3,97	4,48	5,00	5,55
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	6,73	9,55	12,7	15,9	18,5	25,2
A	6,12	6,58	7,16	7,70	8,18	8,69
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	31,6	38,0	48,9	59,6	75,6	92,5
A	8,96	9,76	10,28	10,53		
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	121	170	272,5	412,5		

Tabelle 18.

l_1 = 50 mm d_1 = 0,875 mm
l_2 = 22,5 mm d_2 = 0,06 mm f = 4309
h = 4,70 cm ϑ = 25,5°
T = 255 sec ω_p = 0,0245

Kurve 4e.

A	0,47	0,95	1,50	1,96	2,42	2,46
$\alpha \cdot f$	11,0	23,06	27,60	39,6	52,5	52,6
A	2,93	2,96	3,44	3,90	4,28	4,555
$\alpha \cdot f$	67,2	68,9	86,2	97,7	131,8	181,0

Tabelle 19.

$l_1 = 50$ mm $d_1 = 0{,}865$ mm
$l_2 = 31$ mm $d_2 = 0{,}09$ mm $f = 17990$
$h = 4{,}70$ cm $\vartheta = 25{,}1^0$
$T = 29{,}4$ sec $\omega_p = 0{,}213$

Kurve 4a.

A	0,268	0,69	1,21	1,75	2,42	2,97
$\alpha \cdot f$	68,4	126	209	290	430	469
A	3,52	4,10	4,31	4,52		
$\alpha \cdot f$	720	978	1245	1478		

Tabelle 20.

$l_1 = 50$ mm $d_1 = 0{,}86$ mm
$l_1 = 23$ mm $d_2 = 0{,}10$ mm $f = 37018$
$h = 4{,}70$ cm $\vartheta = 24{,}9^0$
$T = 8{,}6$ sec $\omega_p = 0{,}729$

Kurve 4b.

A	0,306	0,77	1,29	1,78	2,22	2,75
$\alpha \cdot f$	242	448	684	944	1221	1585
A	3,25	3,71	4,18	4,6		
$\alpha \cdot f$	2020	2530	3610	7140		

Tabelle 21.

$l_1 = 50$ mm $d_1 = 0{,}55$ mm
$l_2 = 21$ mm $d_2 = 0{,}150$ mm $f = 182230$
$h = 4{,}70$ cm $\vartheta = 24{,}95^0$
$T = 2{,}94$ sec $\omega_p = 2{,}13$

Kurve 4c.

A	0,21	0,59	1,03	1,44	1,90	2,19
$\alpha \cdot f$	528	1020	1508	1720	2190	2470
A	2,52	2,87	3,22	3,55	3,83	4,08
$\alpha \cdot f$	2860	3100	3700	4190	5280	6590
A	4,42					
$\alpha \cdot f$	10250					

Tabelle 22.

l_1 d_1 — f wie in Tabelle 21

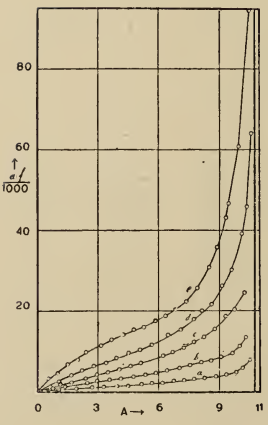
h = 4,71 cm ϑ = 26,05°

T = 1,57 sec ω_p = 3,99

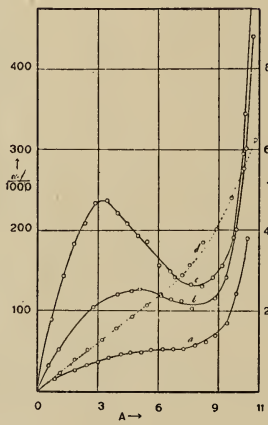
Kurve 4d.

A	0,35	0,76	1,06	1,44	1,77	1,98
$\alpha \cdot f$	1330	2150	2510	3190	3570	3790
A	2,23	2,45	2,76	3,16	3,42	3,69
$\alpha \cdot f$	4060	4190	4240	4410	4825	5700
A	3,94	4,24	4,52			
$\alpha \cdot f$	7340	10850	19050			

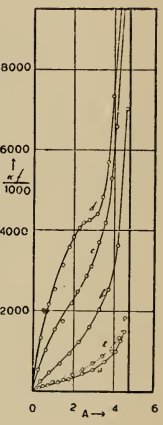
Figur 2.



Figur 3.



Figur 4.



II. Versuche mit verschiedenen Höhen bei derselben Geschwindigkeit.

A. Platte von 35,6 cm Durchmesser.

Gefäß Nr. 1.

Tabelle 23.

l_1 = 120 mm d_1 = 0,867 mm

l_2 = 29 mm d_2 = 0,07 mm f = 5781

h = 11,25 cm ϑ = 16,2°
T = 231 sec ω_p = 0,0271

A	1,12	1,84	2,50	3,23	3,92	4,71
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,324	0,393	0,514	0,635	0,768	0,924
A	5,43	6,14	6,84	7,58	8,25	8,93
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,069	1,213	1,420	1,570	1,85	2,01
A	9,65	10,27	10,83			
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	2,40	2,77	3,12			

Tabelle 24.

f, l_1 etc. wie bei Tabelle 23
h = 8,75 cm ϑ = 15,6°
T = 233 sec ω_p = 0,0268

A	0,57	1,15	1,85	2,53	3,66	4,45
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,246	0,445	0,583	0,803	1,12	1,32
A	5,18	5,91	6,68	7,36	8,35	
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,58	1,83	2,11	2,46	3,72	

Tabelle 25.

l_1 l_2 etc. wie bei Tabelle 23
h = 6,23 cm ϑ = 15,35°
T = 235 sec ω_p = 0,0267

A	0,31	0,85	1,38	1,96	2,61	3,19
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,266	0,514	0,705	0,988	1,31	1,45
A	3,66	4,22	4,76	5,26		
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,81	2,01	2,05	2,75		

Tabelle 26.

l_1 l_2 f wie in Tabelle 23
h = 3,74 cm ϑ = 15°
T = 236 sec ω_p = 0,0266

A	0,4	0,88	1,30	1,68	2,23	2,74
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,548	0,924	1,242	1,519	2,17	2,59
A	3,21					
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	2,68					

Tabelle 27.

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 28$ mm $d_2 = 0{,}3$ mm $f = 1\,717\,800$
$h = 11{,}1$ cm $\vartheta = 15{,}6^0$
$T = 1{,}57$ sec $\omega_p = 3{,}98$

Kurve 5a.

A	0,23	0,43	0,89	1,42	1,98	2,52
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	38,8	51,5	80,6	116	134	163
A	3,09	3,61	4,68	5,25	6,24	6,75
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	173,5	189	185,5	154,5	140,7	135
A	7,34	7,83	8,35	8,85	9,36	9,93
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	120	120	113	124	141	192
A	10,44					
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	304					

Tabelle 28.

l_1 l_2 — f wie in Tabelle 27
$h = 8{,}6$ cm $\vartheta = 16{,}2^0$
$T = 1{,}57$ sec $\omega_p = 3{,}98$

Kurve 5b.

A	0,11	0,53	1,18	1,69	2,25	3,29
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	25,2	49,8	74,8	93,5	111,6	128
A	3,85	4,36	4,85	5,46	5,93	6,45
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	137	139	143	135,6	126	128
A	7,00	7,52	8,05			
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	145	197	331			

Tabelle 29.

l_1 l_2 . . . f wie in Tabelle 27
$h = 6{,}45$ cm $\vartheta = 16{,}7^0$
$T = 1{,}57$ sec $\omega_p = 3{,}98$

Kurve 5c.

A	0,22	0,72	1,22	1,77	2,31	2,82
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	22,4	45,3	61,9	79,5	92,4	104,8

A	3,33	3,86	4,4	4,9	5,45	5,7
$\alpha \cdot f \cdot 10^{3}$	115,5	117,3	126,8	141,2	285	361

Tabelle 30.

l_1 l_2 . . . f wie in Tabelle 27

h = 3,81 cm ϑ = 17°

T = 1,57 sec ω_p = 3,98

Kurve 5d.

A	0,23	0,75	1,24	1,79	2,34	2,86
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	29,2	53,2	84	99,6	144,2	221,5
A	3,32					
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	369					

Tabelle 31.

Bei den Tabellen 31—34 war die Versuchssubstanz destilliertes Wasser, es wurde bei allen 4 Versuchen eine Sonde von folgenden Dimensionen benutzt:

l_1 = 120 mm d_1 = 0,855 mm

l_2 = 36 mm d_2 = 0,05 mm f = 1065

h = 10,94 cm ϑ = 16,95°

T = 11,8 sec ω_p = 0,531

Kurve 10.

A	0,28	0,66	0,95	0,75	1,22	1,6
$\alpha \cdot f$	227	373	359	384	311	280
A	2,74	4,89	7,10	9,66	10,16	10,30
$\alpha \cdot f$	274	274	262	264	275	295
A	10,58					
$\alpha \cdot f$	354					

Tabelle 32.

h = 6,18 cm ϑ = 17,5°

T = 11,8 sec ω_p = 0,531

Kurve 8.

A	0,62	1,27	1,60	2,05	2,39	2,57
$\alpha \cdot f$	372	311	236	299	309	325

A	2,82	3,13	3,72	4,28	5,2	5,75
$\alpha \cdot f$	310	311	320	314	321	327
A	5,88					
$\alpha \cdot f$	456					

Die folgenden Werte wurden am nächsten Tage bei $\vartheta = 17{,}95^0$ gefunden.

A	0,42	0,83	0,65	1,07	0,898	1,505
$\alpha \cdot f$	371	397	389	328	363	308

Tabelle 33.

h = 3,83 cm $\vartheta = 17{,}3^0$
T = 11,8 sec $\omega_p = 0{,}531$

A	0,26	0,51	0,65	0,78	0,89	1,10
$\alpha \cdot f$	254	380	394	402	378	333
A	1,22	1,62	1,97	2,30	2,48	2,88
$\alpha \cdot f$	301	290	307	313	313	313
A	3,24	3,48				
$\alpha \cdot f$	310	378				

Tabelle 34.

h = 2,305 cm $\vartheta = 17^0$
T = 11,8 sec $\omega_p = 0{,}531$

Kurve 9.

A	0,21	0,40	0,59	0,92	1,22	1,52
$\alpha \cdot f$	221	377	420	372	329	316
A	1,76	2,00				
$\alpha \cdot f$	313	388				

B. Platte von 15 cm Durchmesser.

a) Gefäß Nr. 2.

In den Tabellen 35—39 hatte die Sonde folgende Dimensionen:

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}85$ mm
$l_2 = 26$ mm $d_2 = 0{,}305$ mm $f = 2268000$

Tabelle 35.

h = 14,1 cm ϑ = 24,55°
T = 0,84 sec ω_p = 7,47

Kurve 6a.

A	1,18	4,24	5,27	6,88	7,96	9,03
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	5,67	19,5	28,4	47,2	63,75	80,5
A	10,12	11,16	12	12,8	13,3	13,65
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	95	103,5	99,25	98	140	306
A	14					
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	660					

Tabelle 36.

h = 9,33 cm ϑ = 24°
T = 0,85 sec ω_p = 7,38

Kurve 6b.

A	0,42	0,93	1,75	2,55	3,35	4,17
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	13,6	23,1	24,9	51,5	63,5	85
A	4,95	5,73	6,58	7,33	8,17	8,65
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	95,9	101	104	107,5	118	204
A	8,94					
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	379					

Tabelle 37.

h = 5,08 cm ϑ = 24°
T = 0,85 sec ω_p = 7,38

Kurve 6c.

A	0,38	0,89	1,34	1,77	2,19	2,59
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	30,9	88,5	113,4	129,3	143	155
A	3,11	3,47	3,85	4,23	4,58	4,88
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	158	163	192,9	206,5	338	682

Tabelle 38.

h = 2,93 cm ϑ = 18,9°
T = 0,87 sec ω_p = 7,20

Kurve 6d.

A	0,17	0,55	0,90	1,15	1,55	1,93
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	60,8	165	204	213	293	422
A	2,15	2,40				
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	585	741				

Tabelle 39.

h = 1,972 cm ϑ = 25,1°
T = 0,835 cm ω_p = 7,50

A	0,24	0,50	0,66	0,86	1,09	1,30
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	115,4	154	168	209	247	289
A	1,55	1,77				
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	431	725				

Bei den Versuchen 40—44 wurde die folgende Sonde benutzt:

l_1 = 120 mm d_1 = 0,85 mm
l_2 = 26 mm d_2 = 0,305 mm f = 2268000

Tabelle 40.

h = 14,25 cm ϑ = 20,5°
T = 1,56 sec ω_p = 4,02

A	3,34	5,46	7,05	8,62	10,5	11,0
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,65	4,54	12,9	20,9	42,2	48,8
A	12,0	12,5	13,1	13,5	13,8	14,0
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	68,1	89,3	122,4	192,6	263	401

Tabelle 41.

h = 9,33 cm ϑ = 24°
T = 1,55 sec ω_p = 4,05

A	0,68	1,48	2,30	3,04	3,88	4,71
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	4,99	8,62	12,47	16,79	22,00	31,5
A	5,54	6,30	7,10	7,90	8,45	8,93
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	40,1	50,1	57,8	74,0	118,5	221,3
A	9,18					
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	401,0					

Tabelle 42.

h = 5,08 ϑ = 24,28°

T = 1,56 sec ω_p = 4,02

A	0,68	1,13	1,65	2,17	2,66	3,15
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	21,5	29,1	39	47,6	58,7	68,1
A	3,57	3,97	4,38	4,70	4,93	
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	84,8	109,5	158	236	358	

Tabelle 43.

h = 2,93 cm ϑ = 19,05°

T = 1,66 sec ω_p = 3,78

A	0,2	0,5	0,77	1,05	1,33	1,52
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	44,5	72,6	96,9	125	153	184
A	1,81	2,1	2,37	2,65		
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	213	290,5	413	531		

Tabelle 44.

h = 1,97 cm ϑ = 24,7°

T = 1,55 sec ω_p = 4,05

A	0,2	0,26	0,56	0,78	1,0	1,25
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	51,5	57,8	88,8	118,8	148	178,3
A	1,62	1,82				
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	277	439				

b) Gefäß Nr. 3.

Bei den folgenden 2 Versuchen, ebenso wie in der Tabelle 50 mußte wegen der Dimensionen des Gefäßes zur Untersuchung des Sondenausschlages in größeren Tiefen eine zweite Sonde verwendet werden, mit der die Erscheinungen in der Nähe des Bodens verfolgt wurden. Die erste Sonde wurde für Messungen in der Nähe der Platte benutzt.

Tabelle 45.

Erste Sonde:

l_1 = 120 mm d_1 = 0,305 mm f = 2268000

l_2 = 26 mm d_2 = 0,85 mm

h = 29 cm ϑ = 25,2°
T = 0,83 sec ω_p = 7,55

Kurve 6e.

A	28,8	28,3	27,8	27,3	26,2	25,2
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	561	164,4	64,6	50	56,7	63
A	24,1	23	22	20,9	19,9	18,6
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	69	69	66,9	65,6	54,4	48,6
A	17,85	17,8	16,7	14,65	13,8	
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	41,3	42	32,9	25	20,4	

Zweite Sonde:

l_1 = 120 mm d_1 = 0,75 mm
l_2 = 7 mm d_2 = 0,10 mm f = 73330
h = 29 cm ϑ = 25,35°
T = 0,83 sec ω_p = 7,55

A	17,9	16,7	15,3	14	12,7	11,3
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	32,3	25,8	25	20,75	13,4	8,65
A	10	8,7	6,3	6	4,7	3,3
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	5,65	3,60	2,27	1,61	1,32	1,03
A	2,5					
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,63					

Tabelle 46.

Erste Sonde:

l_1 = 120 mm d_1 = 0,85 mm
l_2 = 26 mm d_2 = 0,305 mm f = 2211900
h = 29 cm ϑ = 20,37°
T = 1,57 sec ω_p = 3,99

A	28,6	28,4	28,1	27,8	27,5	27,3
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	251	171	108	85	67	58
A	27,0	26,8	26,5	26,2	26	25,5
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	53	50	46,6	45,5	44,9	45,7
A	25	24,4	23,9	23,3	22,8	22,3
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	42,7	40,0	37,6	33,9	29,9	25,9
A	21,1	20,1	19,1	18,1	17,0	
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	19,4	14,1	9,95	3,75	1,88	

Zweite Sonde:

$l_1 = 120$ mm $\quad d_1 = 0{,}75$ mm

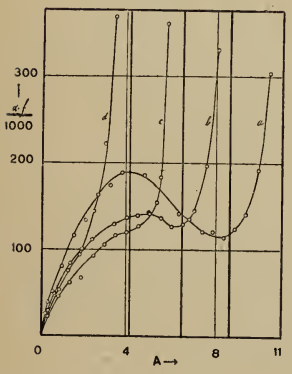
$l_2 = 7$ mm $\quad d_2 = 0{,}1$ mm $\quad f = 73330$

$h = 29$ cm $\quad \vartheta = 20{,}85^0$

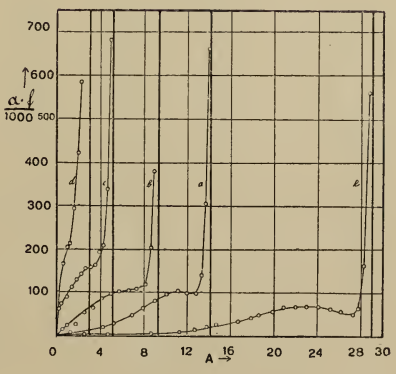
$T = 1{,}57$ sec $\quad \omega_p = 3{,}99$

A	20,9	19,9	18,9	17,9	16,8	15,6
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	20,9	12,8	9,1	6,4	4,32	2,87
A	14,5	13,5	12,5	11,4	10,4	9,5
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,94	1,34	0,938	0,65	0,46	0,34
A	8,2	6,9	4,5			
$\alpha \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,205	0,066	0,030			

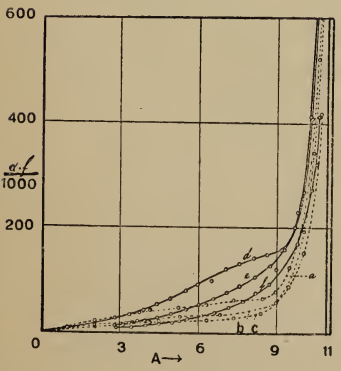
Figur 5.



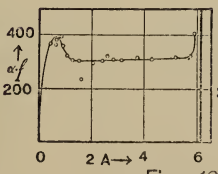
Figur 6.



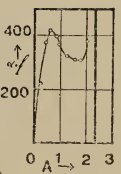
Figur 7.



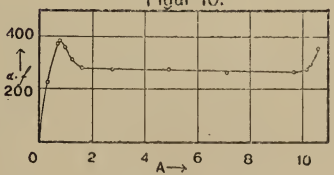
Figur 8.



Figur 9.



Figur 10.



III. Versuche mit verschieden langen Sonden bei konstanter Geschwindigkeit und Höhe.

A. Platte von 35,6 cm Durchmesser.

Gefäß Nr. 1.

Tabelle 47.

$l_1 = 246$ mm $d_1 = 0{,}865$ mm
$l_2 = 30{,}5$ mm $d_2 = 0{,}150$ mm $f = 141800$
$h = 11$ cm $\vartheta = 14{,}6^0$
$T = 54$ sec $\omega_p = 0{,}1165$

Kurve 11a.

A	1,2	2,45	3,70	4,9	5,98	7,2
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	9,93	15,8	24	32,8	41,2	55,2
A	8,42	9,6	9,65	10,3	10,5	
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	69,1	94,5	100,6	192,0	230,8	

Tabelle 48.

$l_1 = 140$ mm $d_1 = 0{,}87$ mm
$l_2 = 30{,}5$ mm $d_2 = 0{,}15$ mm $f = 142000$
$h = 11$ cm $\vartheta = 14^0$
$T = 54{,}4$ sec $\omega_p = 0{,}115$

Kurve 11b.

A	1,55	3,02	4,82	6,42	7,92	7,59
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	2,7	4,7	7,09	10,2	12,8	12,05
A	8,52	9,77	10,4	10,87		
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	14,35	18,6	21,9	30,5		

Tabelle 49.

$l_1 = 60$ mm $d_1 = 0{,}865$ mm
$l_2 = 30{,}5$ mm $d_2 = 0{,}150$ mm
$h = 11$ cm $\vartheta = 13{,}65^0$
$T = 55$ sec $\omega_p = 0{,}114$

Kurve 11c.

A	1,6	3,3	4,75	6,20	7,20	8,35
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,34	0,66	0,95	1,21	1,42	1,69
A	9,60	10,10	10,5	10,75		
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,83	1,99	2,84	3,13		

B. Platte von 15 cm Durchmesser.

Gefäß Nr. 3.

Tabelle 50.

Erste Sonde:

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}85$ mm

$l_2 = 26$ mm $d_2 = 0{,}305$ mm $f = 2268000$

$h = 29$ cm $\vartheta = 25{,}1^0$

$T = 0{,}83$ sec $\omega_p = 7{,}56$

Kurve 12a

A	28,81	28,3	27,8	27,3	26,2	25,2
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	551	164	64,6	51	56,7	63,2
A	24,1	23	22	20,9	19,9	18,6
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	68,9	68,9	68,1	65,5	59,4	47,6
A	17,85	17,80	16,72	15,80	14,65	
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	41,3	41,2	26,3	25,0	20,4	

Zweite Sonde:

$l_1 = 120$ mm $d_1 = 0{,}75$ mm

$l_2 = 7$ mm $d_2 = 0{,}1$ mm $f = 73330$

$h = 29$ cm $\vartheta = 25{,}35^0$

$T = 0{,}83$ sec $\omega_p = 7{,}56$

A	17,9	16,7	15,3	14,0	12,7	11,3
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	32,3	25,8	22,9	20,7	13,4	8,65
A	10	8,67	6,32	6,0	4,7	3,8
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	5,64	3,59	2,27	1,61	1,32	1,025
A	2,5					
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,630					

Tabelle 51.

Erste Sonde:

$l_1 = 84{,}5$ mm $d_1 = 0{,}79$ mm
$l_2 = 22{,}5$ mm $d_2 = 0{,}20$ mm $f = 580200$
$h = 29$ cm $\vartheta = 24{,}6^0$
$T = 0{,}83$ sec $\omega_p = 7{,}56$

Kurve 12b.

A	28,7	28,5	28,2	27,6	27,1	26,6
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	178,5	92,8	53,6	21,8	17,1	17,4
A	26,06	25,6	25,02	24,5	24	23,4
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	18,9	20,3	22,0	23,4	24,1	24,9
A	22,9	22,4	21,85	21,3	20,65	20,2
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	24,9	25,9	25,2	25,2	23,9	24,1
A	19,7	19,1	18,65	18,05	17,58	17,15
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	22,7	20,3	20,2	17,4	16,2	15,1
A	16,6	16,1	15,4	14,7		
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	11,9	11,0	7,83	7,25		

Zweite Sonde:

$l_1 = 84{,}5$ mm $d_1 = 0{,}805$ mm
$l_2 = 9$ mm $d_2 = 0{,}105$ mm $f = 71400$
$h = 29$ cm $\vartheta = 25{,}1^0$
$T = 0{,}83$ sec $\omega_p = 7{,}56$

A	19,7	18,9	18,1	17,4	16,5	15,8
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	22,3	20,1	17,9	15,3	13,05	10,85
A	14,9	14,2	13,9	12,5	11,6	10,9
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	9,06	7,43	5,9	4,36	3,57	2,78
A	9,85	9,05	8,3	7,45	6,66	5,9
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	2,00	1,57	1,34	0,81	0,636	0,472
A	5,1					
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,393					

Tabelle 52.

Erste Sonde:

$l_1 = 50$ mm $d_1 = 0{,}86$ mm
$l_2 = 25$ mm $d_2 = 0{,}2$ mm $f = 525300$

h = 29 cm ϑ = 23,7°
T = 0,84 sec ω_p = 7,46

Kurve 12c.

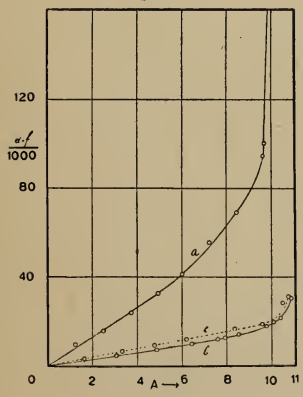
A	28,8	28,4	28,2	27,9	27,6	27,0
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	39,6	19	11	7,72	4,58	4,04
A	26,4	25,9	25,4	24,9	24,3	23,8
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	4,25	4,83	5,25	5,78	6,41	6,3
A	23,3	22,7	22	21,3	20,6	19,9
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3	5,52
A	18,1	17,7				
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	5,2	3,97				

Zweite Sonde:

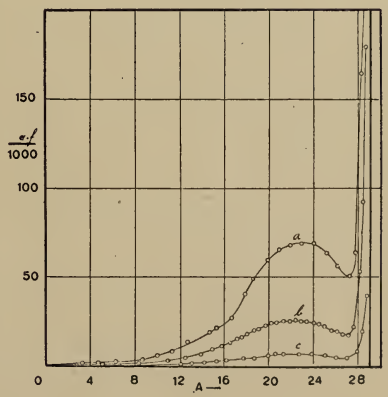
l_1 = 50 mm d_1 = 0,85 mm
l_2 = 13,3 mm d_2 = 0,06 mm f = 11620
h = 29 cm ϑ = 24°
T = 0,84 sec ω_p = 7,46

A	19,4	18,5	17,4	16,2	15,3	14,2
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	5,3	5,04	3,76	2,70	2,5	1,41
A	13,1	12,1	11,05	10,0	9	7,9
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	1,04	0,72	0,55	0,36	0,2	0,11
A	6,8	6,1				
$a \cdot f \cdot 10^{-3}$	0,09	0,07				

Figur 11.



Figur 12.



Geschichtliches. Von älteren Arbeiten mit rotierenden Platten sind die Versuche Unwins[1]) und Gibsons[2]) zu erwähnen. Unwin ließ Messingscheiben mit verschieden rauhen Oberflächen in Wasser rotieren und bestimmte aus dem Drehmoment, das auf einen, die Scheibe umschließenden trifilar aufgehängten Zylinder ausgeübt wurde, den Widerstand der Flüssigkeit. Es ergaben sich Unterschiede, je nachdem die Versuche bei großen oder kleinen Geschwindigkeiten durchgeführt wurden. Aber auch die zweite Arbeit (Gibson) bei der ebenfalls rotierende Scheiben benutzt werden, dürfte kaum Schlüsse auf den vorliegenden Fall gestatten, da der Verfasser die Änderung des Flüssigkeitswiderstandes mit der Temperatur zu ermitteln sucht. Andere Autoren, welche rotierende Körper benutzt haben, wie Brodmann[3]), Schwedoff[4]), Couette[5]), Gurney[6]) u. a. betrachteten die Wirkungen zweier Zylindermäntel aufeinander und suchten stets die Einflüsse der kreisförmigen Bodenflächen zu eliminieren. Zahlreiche Versuche und theoretische Untersuchungen liegen über schwingende Scheiben vor. Diese Betrachtungen lassen sich ebenfalls nicht auf die vorliegende Arbeit anwenden. Denn die An-

---

[1]) W. C. Unwin, Procceed of the Roy. Soc. of London 31, 54. 1881.

[2]) A. H. Gibson, Phil. Mag. (6) 19, 513. 1910.

[3]) C. Brodmann, Diss. Göttingen 27. 1891. Wied. Annalen 45, 159. 1892.

[4]) T. Schwedoff, Journal de Physique (2) 9, 34. 1890.

[5]) M. Couette, Annales de chim. et de phys. (6) 21, 433. 1890.

[6]) L. E. Gurney, Physical Review 26, 98. 1908.

nahmen, welche Coulomb [1]), O. E. Meyer [2]), Grotrian [3]), König [4]), Garrett [5]) u. a. gemacht haben, sind ausnahmslos nur bei Flüssigkeiten mit kleinem Reibungskoeffizienten bezw. langsamen Bewegungen der Platte erfüllt, so daß auch die verschiedenen Korrektionen wegen der Einflüsse des Plattenrandes und der Gefäßwände hier nicht interessieren.

Theoretisches. Aus den allgemeinen Differentialgleichungen für reibende Flüssigkeiten läßt sich ein Schluß ziehen, der, wie später gezeigt werden wird, in einzelnen Fällen durch das Experiment bestätigt wird. Wendet man nämlich die Differentialgleichung bei stationären Flüssigkeitsbewegungen auf Erscheinungen vorliegender Art an, so ist, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet und die z-Achse auf der Flüssigkeit senkrecht steht:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = 0$$

Diese Gleichung liefert durch Integration

$$\frac{d\omega}{dz} = a$$

$$\omega = az + b,$$

wobei a und b Konstanten sind. Nimmt man an, daß im Nullpunkt $\omega = z = 0$ ist, und daß für $z = h$ (wenn h die Flüssigkeitshöhe ist) $\omega = \omega_p$ ist, also daß eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω_p rotierende Platte einer Flüssigkeit eine Deformation erteilt, so folgt

---

[1]) C. A. Coulomb, Mém de l'Inst. nat. 3, 296. 1802.

[2]) O. E. Meyer, Crelles Journal 59, 229. 1861.

[3]) O. Grotrian, Pogg. Annalen 157, 130. 1876.

[4]) W. König, Wied. Annalen 25, 618. 1885.

[5]) H. Garret, Diss. Heidelberg p. 10. 1903.

$$b = o$$

$$1.\quad \omega = \frac{\omega_p}{h} z.$$

Das heißt: es ändert sich die Winkelgeschwindigkeit ω eines Teilchens im Abstand z vom Boden direkt mit z[1]). In unserer Ausdrucksweise sind die Größen ω_p und h mit denen der Tabellen identisch, z entspricht A. ω läßt sich mit Hilfe der Sonde nicht direkt bestimmen, sondern man kann nur aus der gemessenen Ablenkung α der Sonde und der bekannten Direktionskraft f des Aufhängedrahtes auf ω schließen. Ist der stationäre Zustand der Flüssigkeit erreicht, so besteht Gleichgewicht zwischen den Torsionskräften des Drahtes und den Reibungskräften der Flüssigkeit, die einem Teilchen die Geschwindigkeit ω erteilen. Wir haben dann:

$$2.\quad \alpha \cdot f = k \cdot \omega,$$

worin k eine von der Zähigkeit η der Versuchssubstanz und den Dimensionen der Sonde abhängige Funktion ist. Wir dürfen daher Gleichung 1 nur in folgender Form schreiben:

$$3.\quad k'\omega = \frac{\omega_o}{h} A$$

und können so die Proportionalität zwischen $\alpha \cdot f$ resp. ω und A prüfen. Hierzu bietet neben der Rechnung auch die graphische Darstellung Mittel und Wege. Über die Herstellung der Kurven ist auf Seite 15 bereits das Nötige gesagt worden[2]). Hinsichtlich ihrer Gestalt

---

[1]) Siehe auch: M. Brillouin, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Paris I, 92. 1907.

[2]) Hier sei nur noch erwähnt, daß der Boden des Gefäßes in den Nullpunkt gelegt worden ist. Wenn die Flüssigkeit haftet,

lassen sich zwei verschiedene Typen unterscheiden, die in den nächsten Absätzen näher beschrieben werden.

Kurventypus 1. Diese Form der Kurve (Tabelle 3 Kurve 3 d) entspricht einer kleinen Umdrehungsgeschwindigkeit der Platte ($T = 231''$). Es sind der Deutlichkeit wegen, die Werte für $\frac{\alpha \cdot f}{1000}$ mit 100 multipliziert. Die Kurve besteht aus zwei, ineinander übergehenden Stücken, einer Geraden, die bis etwa 7 cm Abstand vom Nullpunkt reicht und einer krummen Linie, welche konvex gegen die Abszissenachse ist und sich allmählich der Platte nähert. Beide Teile gehen stetig ineinander über. Dieser „1. Kurventypus", wie wir kurz sagen wollen, zeigt, daß die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit zuerst proportional A wächst im Sinne der Gleichung 3, und dann in der Nähe der Platte rascher als A zunimmt. Ganz verschieden hiervon ist der

Typus 2. Ihm entspricht eine große Geschwindigkeit der Platte ($T = 1{,}25''$ Tabelle 11 Kurve 3 c). Die Kurve besteht hier aus drei Teilen. In der Nähe des Bodens ein rasch ansteigender Ast, konkav nach unten. Dann ein Wendepunkt auf einem fast geradlinigen Stücke, durch den hindurch die Kurve in einen dritten Ast übergeht, der konvex gegen die x-Achse ist und sich rasch der Platte nähert. Die Winkelgeschwindigkeit ist nirgends mehr A proportional, sie wächst in der Nähe des Bodens stark bis zu einem

---

so ist hier $\omega = 0$, die Sonde gibt keinen Ausschlag. Die Kurven rechtfertigen diese Annahme; denn sie gehen ohne Ausnahme durch den Nullpunkt hindurch

Maximum in 3 cm Abstand vom Nullpunkt und erreicht hier einen Wert, der merkwürdigerweise erst wieder in 1 cm Abstand von der Platte auftritt. Nach diesem Maximum nimmt ω fast ebenso rasch wieder ab und erreicht in etwa 8 cm Abstand vom Boden ein deutliches Minimum. In der Nähe der Platte wächst dann ω rasch an. Diese beide Typen sind Extreme zwischen denen, wie sich noch zeigen wird, Übergänge bestehen. Wie die Kurven sich ändern, wenn die Geschwindigkeit der Platte, oder die Flüssigkeitshöhe, oder die Länge der Sonde oder die Gefäßweite verändert werden, zeigen die nächsten Abschnitte.

I. Versuche mit verschiedenen Umdrehzeiten der Platte bei konstanter Höhe. Die hierher gehörenden Tabellen (Abschnitt I 3—11) sind so angeordnet, daß mit kleinen Geschwindigkeiten der Platte begonnen ist. Für T = 231" (Tabelle 3) erhalten wir den an diesem Beispiel erörterten 1. Kurventypus. Wird die Umdrehzeit T verkleinert (Tabellen 4, 5, Kurven 2a, b) so bleibt die Form der Kurve erhalten. Aber es wird mit wachsender Geschwindigkeit das geradlinige Stück der Kurve in der Nähe des Bodens kleiner. Im ersten Fall reicht es bis zur Abszisse, A = 7 im zweiten bis A = 6 cm. Das heißt also, daß eine lineare Beziehung zwischen A und der Winkelgeschwindigkeit bei kleinen Geschwindigkeiten in der Nähe des Bodens vorhanden ist. Geht man zu mittleren Umdrehzeiten (T = 27,8 Sek. u. s. w. Tabellen 6—11, Kurven 2c—e, 3a) über, so verschwindet mit kleiner werdendem T der 1. Kurventypus, und es bilden sich allmählich die Eigenschaften des 2. Typus

heraus, welche, wenn T = 1,84 Sek. (Tabelle 10, Kurve 3a, b) wird, besonders deutlich ausgeprägt werden und im Grenzfalle T = 1,25" (Tabelle 3, Kurve 3c) am besten zu sehen sind. Mit dem Wert T = 1,25" ist den Versuchen mit der großen Platte ein Ende gesetzt. Geht man nämlich zu größeren Geschwindigkeiten über, so machen sich Zentrifugalkräfte störend bemerkbar. Die Flüssigkeitsoberfläche, die für gewöhnlich mit der Unterseite der Platte zusammenfällt, wird bei zunehmender Geschwindigkeit der Platte zu einem Rotationsparaboloid deformiert, so daß an der Öffnung der Platte eine Luftblase eintritt und eine Beeinflussung der Flüssigkeit durch die Platte unmöglich macht. Für weitere Versuche stand nun noch eine kleinere Platte von 15 cm Durchmesser zur Verfügung, bei der die Umdrehzeit T noch kleiner gewählt werden konnte, als bei der großen Platte. Die Resultate enthalten die Tabellen 12—14, ferner 18—22 und die Kurven Figur 4a—e. Für kleine Geschwindigkeiten zeigen die letzteren den 1. Typus. Auch hier liegen die Kurven für höhere Geschwindigkeiten über denen für kleinere, und es gehen die beiden Typen allmählich ineinander über. Obwohl die Umdrehzeit bei dem letzten Versuch ähnliche Werte erreichte wie bei der großen Platte (Tabelle 22, Kurve 4 a), so sind die erhaltenen Kurven 4 a bezw. 3 b und c sich nicht in den Größenverhältnissen ähnlich. Dies ist wohl darauf zurückzuführen, daß die absolute Geschwindigkeit des Plattenrandes für die mehr oder minder deutliche Ausbildung des 1. Typus eine Rolle spielt und nicht die Zeit für eine Umdrehung der Platte. Bildet man in den beiden Fällen die Geschwindigkeit des Plattenrandes, so ergeben

sich, da die Radien der Platten 17,8 bezw. 7,5 cm sind, die Werte: $\omega_p \cdot 17{,}8 = 3{,}4 \cdot 17{,}8 = 60{,}5$ cm

bezw. $\omega_p \cdot 7{,}5 = 4 \cdot 7{,}5 = 30$ cm.

In der Tat werden die Kurven bei gleichen Geschwindigkeiten des Plattenrandes einander ähnlich, und eine einfache Rechnung zeigt, daß bei einer absoluten Geschwindigkeit von etwa 8 cm pro Sekunde bei beiden Platten ein Wendepunkt in der Kurve auftritt.

Diese Tatsache und die frühere Bemerkung über das Auftreten störender Zentrifugalkräfte sind vielleicht geeignet, das Auftreten der zwei Kurventypen zu erklären. Bei kleinen Geschwindigkeiten ist die Abhängigkeit der Geschwindigkeit eines Teilchens von der Entfernung vom Boden gemäß der Gleichung 3 in der Nähe des Bodens vorhanden. Auch läßt sich, wie hier nur kurz erwähnt werden soll, in einer bestimmten Ebene ($A = \text{const}$) zwischen ω und dem zugehörigen T bei zwei verschiedenen Kurven ein linearer Zusammenhang ermitteln, so daß

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

wird. Dies trifft aber nur zu bei Kurven des 1. Typus und auch hier nur, wenn man sich auf das gerade Stück in der Nähe des Bodens beschränkt. Geht man zu Kurven des 2. Typus über, so lassen sich einfache Beziehungen dieser oder ähnlicher Art nicht finden. Die eigentümliche Form des 2. Kurventypus zeigt, daß wir es in diesen Fällen mit komplizierteren Vorgängen zu tun haben, bei denen vermutlich der Trägheitswiderstand der Flüssigkeit eine Rolle spielt. Bei den kleineren Geschwindigkeiten ist er zu vernachlässigen,

um schließlich bei großen Werten für ω_p den Versuchen ein Ende zu setzen[1]). In mittleren Bereichen tritt er vielleicht gleichzeitig mit dem Wendepunkt in Erscheinung.

Einige qualitative Versuche machten dies wahrscheinlich. Das Glasgefäß B (Figur 1) wurde nur bis zur Hälfte mit Paraffinöl gefüllt und unter dieses eine etwa eben so hohe Schicht Wasser gebracht. Wurde dann die Platte mit verschiedener Geschwindigkeit gedreht, so zeigte sich eine Deformation der ebenen Trennungsschicht zwischen Öl und Wasser bei etwa derselben Rotationsgeschwindigkeit, bei welcher in den Kurven Wendepunkte auftraten. Nach Überschreiten des Grenzwertes für ω_p (Tabelle 11) trieben die Zentrifugalkräfte die Ölschicht so stark gegen die Gefäßwand, daß das Wasser fast an die Platte herantrat.

II. Versuche bei verschiedenen Flüssigkeitshöhen. Paraffinöl. Es schien von Interesse zu untersuchen, welchen Einfluß die Höhe der Flüssigkeit auf die Gestalt der Geschwindigkeitskurven hat. Die Ergebnisse zeigen die Tabellen 23—35 und Kurven. Für kleine Geschwindigkeiten (Tabellen 23—26) wurden unter denselben Bedingungen wie im 3. Versuch, vier verschiedene Höhen gewählt. Die Kurven zeigen den 1. Typus und bieten nichts Neues, so daß von ihrer bildlichen Wiedergabe abgesehen ist. Eingehendere Beobachtungen schienen für solche Geschwindigkeiten von Interesse, bei welchen die Kurve den 2. Typus zeigt. Von den zahlreichen Versuchen in dieser Rich-

[1]) Siehe auch L. Prandtl, Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg II, 484 u. 485 oben. 1905.

tung habe ich hier nur einen (Tabelle 27—30, Kurve 5a—d) angeführt, weil nämlich die Gestalt der Kurve durch Verändern der Höhe nicht beeinflußt wird. Wir haben bei allen Kurven den 2. Typus. Zwar verschwindet das deutliche Maximum und Minimum mit abnehmender Höhe, dagegen bleibt stets der Wendepunkt erhalten, der bei den Kurven c und d in etwa gleicher Entfernung von der Platte liegt, ebenso wie die Minima bei den Kurven a und b. Ähnliche Ergebnisse lieferten Versuche mit der kleineren Platte (Tabellen 35 ff., Kurven 6a—e). Hier konnte die Höhe innerhalb noch weiterer Grenzen geändert werden, weil ein Gefäß von 35,5 cm Höhe zur Verfügung stand. Die Kurven gehören dem 2. Typus an, bei großen Höhen (14,1—29 cm) tritt ein Maximum und Minimum auf. Es ist bemerkenswert, daß in allen Fällen der Wendepunkt stets in etwa 2 cm Abstand von der Platte liegt, ganz gleich, wie groß die Höhe ist. Bei der größten Flüssigkeitshöhe (h = 29 cm, Kurve 6e) sieht man deutlich den starken Abfall der Geschwindigkeit in der Nähe der Platte. Da infolgedessen die Ausschläge der Sonde in der Nähe des Bodens relativ klein wurden, so war es zweckmäßig, in dieses Gebiet eine zweite Sonde einzuführen. Ein dünner Aufhängedraht dieser Sonde gestattete diese Messung der kleinen Geschwindigkeit in der Nähe des Bodens. In dieser Gegend scheint nämlich noch ein zweiter Wendepunkt mit schwacher Flexion aufzutreten, die Kurve ist daher im Gegensatz zu den anderen Vertretern des 2. Typus an dieser Stelle konvex nach unten[1]). Dasselbe zeigt sich auch bei

[1]) Siehe auch die Kurven 12 a, b, c, Tabellen 49—51 im III. Abschnitt.

der Höhe h = 14,1 (Tabelle 35, Kurve 6a), während für h = 9 cm und bei den übrigen Versuchen der 2. Typus auftritt.

Wasser. Wählt man als Versuchssubstanz destilliertes Wasser, so tritt bei kleiner Flüssigkeitshöhe (Tabelle 34, Kurve 9) der Typus 2 mit großer Deutlichkeit auf. Hierbei war T = 11,8″ und h = 2,305 cm und es muß die große Ähnlichkeit dieser Kurve mit 3c Tabelle 11 auffallen, wenn man die gänzlich verschiedenen Versuchsbedingungen, insbesondere die Zähigkeiten beider Substanzen in Betracht zieht. Weitere Versuche mit Wasser sind daher zur Klärung dieser Fragen erwünscht. — Wird beim Wasser die Höhe vergrößert, so zeigt sich ein eigentümliches Resultat: Das deutliche Maximum in der Nähe des Bodens bleibt an derselben Stelle erhalten, dagegen schiebt sich mit zunehmender Höhe ein geradliniges Stück parallel der Abzissenachse zwischen das Maximum und den rasch ansteigenden Ast nahe der Platte. Es bleibt also längs einer Strecke von 5 bezw. 9 cm Länge bei 6,18 bezw. 11 cm Flüssigkeitshöhe die Winkelgeschwindigkeit konstant. Dies würde heißen, daß wir hier eine Wirbelbewegung wie in einer idealen Flüssigkeit vor uns haben, bei welcher die Art der Erzeugung und die Begrenzung des Wirbels von den Erscheinungen bei idealen Flüssigkeiten verschieden ist. Ähnliche Vorgänge für die Potentialbewegung hat Prandtl in der Seite 45 erwähnten Abhandlung beschrieben. Er findet bei der Wirkung einer bewegten Flüssigkeit auf einen festen Körper, daß sich Gebiete bilden, in denen Vorgänge wie in reibungslosen Flüssigkeiten auftreten. Wir haben hier also einen ähnlichen Fall für die Wirbelbewegung wie dort

für die Potentialbewegung. Wie nun auf Seite 14 erwähnt wurde, sind die Versuchsfehler beim Wasser groß. Aber gerade dieses geradlinige Stück der Kurve konnte in zahlreichen, hier nicht aufgeführten Versuchen mit Wasser verfolgt werden.

Fassen wir die bisherigen Resultate kurz zusammen, so ergibt sich, daß die zwei Typen der Geschwindigkeitskurve von der Flüssigkeitshöhe unabhängig sind.

III. Versuche mit verschieden langen Sonden und verschieden weiten Gefäßen. Um zu entscheiden, ob die Beschaffenheit der Sonde Einfluß auf die Versuchsergebnisse hat, wurden zunächst einige Versuche angestellt mit Sonden, bei denen die Aufhängedrähte verschiedene Dimensionen hatten. Wie zu erwarten war, ergaben sich keine bemerkenswerten Unterschiede. Ferner wurden Versuche mit Sonden verschiedener Länge durchgeführt (Tabellen 46—51, Kurven 11 und 12)[1]). Figur 11 entspricht einer kleinen Geschwindigkeit ($T = 54''$); die Länge l_1 hatte der Reihe nach die Werte 24,6, 14 und 6 cm. Der Kurventypus ist in allen Fällen derselbe und wird von der Länge der Sonde nicht beeinflußt. Insbesondere liegen die Maxima auf allen Kurven an derselben Stelle. Ein einfacher Zusammenhang zwischen der Sondenlänge und der Winkelgeschwindigkeit hat sich nicht ergeben. Ferner ist die Geschwindigkeit längs eines Querschnitts parallel der Platte nicht konstant, denn in der Nähe der Rotationsachse ist die Geschwindigkeitskurve auf längere Strecken hin geradlinig

[1]) Die punktierte Linie in Fig. 11 deutet an, daß der Wert $\alpha \cdot f$ mit 10 multipliziert ist.

als in 12 cm Entfernung von derselben (Kurve 11 a, Tabelle 48). Es ist noch unentschieden, ob hier durch die Nähe des Plattenrandes besondere Komplikationen eintreten. Bei größeren Geschwindigkeiten scheint dies jedenfalls in stärkerem Maße der Fall zu sein, denn die Kurven 12 a—c (Tabelle 49—51) unterscheiden sich bezüglich der Größe der Ordinaten stark voneinander.

Da ω längs eines Querschnittes sich ändert, so läßt sich über die Größe k (Seite 40) keine einfache Angabe machen, und die Sonde mißt nur mittlere Werte für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit.

Einige bei konstanter Höhe und Geschwindigkeit angestellten Versuche sollten entscheiden, ob die Gefäßweite die Geschwindigkeitskurven beeinflußt. Mit Hilfe der kleinen Platte und den Gefäßen 1 und 2 wurde die Flüssigkeitsbewegung untersucht. Die Ergebnisse zeigen die Tabellen 12—17 und die Kurven VII. Die ausgezogenen Linien entsprechen dem weiten Gefäß Nr. 1, die punktierten dem zweiten, dessen Durchmesser um 23,5 cm kleiner ist. Die zusammengehörigen Kurven a d, b e, c f zeigen in der Nähe des Bodens ziemliche Übereinstimmung (der Deutlichkeit wegen sind hier die ausgezogenen Kurven fortgelassen), aber in mittleren Abständen sind die Ablenkungen der Sonde im weiten Gefäß fast doppelt so groß als im engen. Auch nahe der Platte scheint dies noch der Fall zu sein. Die Sonde war bei allen Versuchen dieselbe, es wird daher die Gefäßwand auf die Resultate Einfluß haben. Die Kurven selbst bieten nichts Neues, sie zeigen den auf Seite 46 erwähnten Spezialfall des 2. Typus bei d und a.

Zusammenhang der Kurven des 2. Typus mit turbulenten Bewegungen. Die charakte-

ristischen Formen dieses Typus legen die Vermutung nahe, als hätten wir es in den Fällen, wo derartige Kurven auftreten, mit jenen Flüssigkeitsbewegungen zu tun, die man turbulent nennt. Diese Erscheinungen hat Reynolds[1]) zuerst genauer studiert. Er zeigte, daß bei der Strömung von Flüssigkeiten durch Röhren man zwischen stabilen und labilen Flüssigkeitsbewegungen zu unterscheiden hat, die nebeneinander bei einer bestimmten „kritischen Geschwindigkeit" der Teilchen auftreten. Nach und neben ihm haben sich Lord Rayleigh[2]), Kelvin[3]), später Sommerfeld[4]), neuerdings Hamel[5]) mit diesem Problem beschäftigt. Die theoretischen Betrachtungen werden bei mehrdimensionalen Problemen und Flüssigkeiten mit großer Reibung sehr verwickelt. Experimentelle Untersuchungen liegen vor von Ruckes[6]) (Gasreibung), E. Bose und D. Rauert[7]) (Reibung in Kapillaren), Willers[8]) (Viskositätsanomalien von Emulsionen), Hopf[9]) (Turbulenz in einem Flusse) u. a. Uns interessieren hier nur die Versuche von Couette[10]), der die Resultate von Reynolds an Kapillaren und einer zwischen zwei koaxialen

---

[1]) O. Reynolds, Proceedings of the Roy. Society of London 35. 84. 1883.

[2]) L. Rayleigh, ibd. p. 737.

[3]) L. Kelvin, Phil. Mag. (5) 24, 188, 272, 1887.

[4]) A. Sommerfeld, Atti del IV. congresso internationale del matematici. Roma 3, 116. 1909.

[5]) G. Hamel, Götting. Nachrichten, math.-physik. Klasse 3, 261, 1911.

[6]) W. Ruckes, Ann. d. Phys. 25, 1020, 1908.

[7]) E. Bose und D. Rauert, Phys. Zeitschr. 10, 406. 1909.

[8]) F. Willers, ibd. 10, 244. 1909.

[9]) L. Hopf, Ann. d. Phys. (4) 32, 777. 1910.

[10]) l. c. p. 38.

Zylindern in Rotation befindlichen Flüssigkeit bestätigt hat. Couette benutzt als Versuchssubstanzen Wasser, Luft und Öl. Er stellt[1]) eine Beziehung auf zwischen dem Quotienten aus Reibungskoeffizient und Dichte zweier Substanzen und dem Verhältnis der Tourenzahlen, bei denen Turbulenz eintritt, i. e. das auf den inneren Zylinder ausgeübte Drehmoment nicht mehr der Rotationsgeschwindigkeit proportional ist. Für Rüböl, dessen Zähigkeit von derselben Größenordnung ist wie die des Paraffinöls, berechnet er, daß die erwähnte Unstetigkeit erst bei 83 Umdrehungen des äußeren Zylinders in der Sekunde eintritt. Dies entspräche einer absoluten Geschwindigkeit des rotierenden Zylinders (sein Radius ist 14,64 cm) von etwa 520 cm in der Sekunde. Bei unseren Versuchen ist die höchste erreichbare Geschwindigkeit (Tabelle 11) etwa 90 cm pro Sekunde, wenn man die Geschwindigkeit eines Punktes des Plattenrandes berechnet. Bei Couettes Versuchen mit Wasser trat die Unstetigkeit auf, wenn die Geschwindigkeit ungefähr den obigen Wert hatte[2]), bei meinen Versuchen mit Wasser erreichte die letztere nur den Wert 9,5 cm, so daß es hiernach ausgeschlossen erscheint, daß turbulente Bewegungen hätten auftreten können.

Immerhin ist es noch fraglich, ob sich die Betrachtungen Couettes, der koaxiale, nur wenig in den Radien verschiedene Zylinder benutzt hat, auf die vor-

[1]) l. c. p. 490ff.

[2]) C. Brodmann, l. c. p. 84 hat ebenfalls koaxiale Zylinder benutzt, aber keine Unstetigkeiten wie Couette gefunden. Dies rührt wohl daher, daß trotz der größeren Tourenzahl des äußeren Zylinders dessen absolute Geschwindigkeit hinter dem Wert 90 cm zurückblieb.

liegenden Versuche anwenden lassen. Es hat zwar H. A. Lorentz[1]) auf die Ähnlichkeit der von ihm in seiner dritten Abhandlung über theoretische Physik behandelten Falls mit den Couetteschen Versuchen hingewiesen[2]), aber an derselben Stelle[3]) bemerkt, daß große Werte der Zähigkeit der Stabilität günstig seien. Vor allem konnte ein plötzlicher Übergang einer Flüssigkeitsbewegung in die andere, wie er in den obigen Fällen auftritt, nicht festgestellt werden.

Resultate.

Eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit liefert folgendes:

1. Die Bewegungen einer zähen Flüssigkeit unter einer gleichförmig rotierenden Platte lassen sich mit Hilfe von Sonden verfolgen. Die Sondenmethode läßt sich auch zur Untersuchung von Flüssigkeiten mit kleinem Reibungskoeffizient (destilliertes Wasser) anwenden.

2. Die Art dieser Bewegungen hängt im wesentlichen ab von der Geschwindigkeit der Platte.

3. Bei kleinen Geschwindigkeiten ergeben sich in bestimmten Bereichen der Flüssigkeit lineare Beziehungen zwischen der Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen und ihrem Abstand vom Boden des Gefäßes.

4. Bei großen Geschwindigkeiten treten komplizierte Erscheinungen auf, die durch die Annahme

---

[1]) H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik 1, 55. 1907.

[2]) Vgl. auch A. Sommerfeld, l. c. p. 117.

[3]) l. c. p. 58.

des Auftretens turbulenter Bewegungen nicht zu erklären sind.

Zum Schlusse ist es mir eine angenehme Pflicht, meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Wiedemann, in dessen Institut diese Arbeit angefertigt wurde, sowie Herrn Prof. Dr. R. Reiger, der meiner Arbeit stets das größte Interesse entgegengebracht hat, meinen ergebensten Dank auszusprechen. Auch den Assistenten des Instituts, den Herren Privatdozent Dr. J. Würschmidt und Dr. J. Frank sage ich für manche wertvollen Ratschläge meinen besten Dank.

Lebenslauf.

Ich, Walter Gustav Hermann Sanders, protestantischen Bekenntnisses, bin geboren zu Hamburg am 22. November 1889 als Sohn des Kaufmanns P. W. Sanders und seiner Gemahlin Ida, geb. Göllner. Von Michaelis 1897 bis Ostern 1905 besuchte ich die Biebersche Realschule meiner Vaterstadt, bis 1908 die Oberrealschule vor dem Holstentore zu Hamburg. Hierauf bezog ich die Universität Erlangen, hörte dort Vorlesungen bei den Herren Professoren: Fischer, Gordan, Hilb, Lenk, Noether, Reiger, E. Schmidt und Wiedemann, und fertigte in den Jahren 1910 und 1911 im physikalischen Institut die vorliegende Arbeit an.

Seit Oktober 1911 bin ich an der Universität Berlin immatrikuliert, wo die Herren Professoren: Nernst, Planck, Schwarz und Warburg meine Lehrer sind.

Allen Herren Professoren, deren Vorlesungen zu hören ich das Glück hatte, sowie meinen Schuldirektoren Bieber und Thaer spreche ich meinen innigsten Dank aus.

3 0112 072676619